**2017 год**

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап**

**Решения**

**9 класс**

1. Из данного равенства следует, что *2a (a - b) + b(a + b) = 2(a2 – b2), b(3b - a) = 0,* откуда *b = 0* или *a = 3b.* Обаслучая реализуются. Если *b = 0,* то данное равенство выполняется при всех , а значение выражения при всех таких *a* и *b* равно 3. Если *a = 3b* и *a* и *b* отличны от нуля, то данное равенство выполняется, а значение выражения при всех указанных *a* и *b*  равно 1.

Ответ: 1 и 3.

1. Пусть *m – 1, m, m + 1 –* исходные числа. Тогда *N = (m - 1)m(m + 1) – ((m - 1) + m + (m + 1)) = m(m2 - 1) – 3m = m(m2 - 4) =(m - 2)m(m + 2).* Числа *m – 2, m, m + 2* либо последовательные четные, либо последовательные нечетные. Но так как *N* нечетное, то и числа *m – 2, m, m + 2* нечетные, что и требовалось доказать.
2. Медиана СК треугольника АВС является также высотой и биссектрисой, т.к. треугольник равнобедренный. Поэтому ∠КВС = ∠КСВ = ∠КСА = 450. Отсюда КС = КВ, и, значит, треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам (KC = KB, BL = CM) и углу между ними. Поэтому KL = KM, и из равенства ∠BKL = ∠CKM следует ∠LKM = ∠LKC + ∠CKM = ∠LKC + ∠BKL = ∠BKC = 900. Значит, треугольник LMK – прямоугольный равнобедренный.
3. Пусть в день двенадцатилетия Андрея Василию исполняется *х* лет. Тогда Сергею в этот же день исполняется *12 – х* лет. Составим следующую таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | А | В | С |
| день 12-летия Андрея | 12 | *х* | 12 - *х* |
| день 12-летия Василия | 24 - *х* | 12 | 24 - 2 *х* |
| день 12-летия Сергея | 12 + *х* | 2*х* | 12 |

Числа второй строки получаются из чисел первой добавлением к ним слагаемого 12 – *х,* а числа третьей строки – добавлением к числам первой слагаемого *х.* Когда Василию будет 12 лет, то Андрею и Сергею в сумме будет 48 - 3*х* лет, а следовательно, 3*х* делится на 12. Но в день двенадцатилетия Сергея Андрею и Василию в сумме исполнится 12 + 3*х.* Это число также делится на 12.

1. Укажем способ отыскания настоящей монеты. Для первого взвешивания положим на чашки весов по 4 монеты. Возможны два случая.
2. Одна из чашек перевесила. Обозначим через А, В, С и D массы монет на этой чашке; ясно, что хотя бы одна из этих монет настоящая. Вторым взвешиванием сравниваем величины А + В и С + D. Если А + В > С + D или А + В = С + D, то монеты с массами А и В не могут быть фальшивыми, и тогда третьим взвешиванием сравниваем А и В. Более тяжелая из монет обязательно настоящая, а при А = В настоящие обе. Если же А + В < С + D, то третьим взвешиванием сравним С и D.
3. При первом взвешивании зафиксировано равенство масс. Это значит, что на чашках по одинаковому числу фальшивых монет, а общее число взвешенных фальшивых монет четно. Следовательно, среди остальных 7 монет число фальшивых также четно. Для второго взвешивания положим на чашки по 2 монеты из ранее не взвешенных. Если какая-то пара тяжелее, то третьим взвешиванием сравним монеты этой пары; монета, которая тяжелее или равна другой, настоящая. Если же массы пар монет во втором взвешивании равны, то в этих парах по одинаковому числу фальшивых монет, общее число фальшивых среди взвешенных четно, четно оно и среди 3 оставшихся (ни разу не взвешенных). Тогда возьмем любые 2 из этих 3 монет и сравним их массы; если какая-то чашка перевесит, то монета на ней настоящая, в случае же равенства настоящей обязательно будет третья монета.

Ответ: Можно.